JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY **40**, 161–172 (1984)

Une inégalité polynômiale en plusieurs variables

PIERRE GOETGHELUCK

Département de mathématiques, Université de Paris-sud, Centre d'Orsay, Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France

Communicated by Oved Shisha

Received June 1, 1979; revised May 23, 1983

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et m une fonction de $C^s(\bar{\Omega})$. Sous des conditions assez générales sur m et Ω on montre qu'il existe deux constantes C et d telles que pour tout polynôme P de N variables réelles on ait:

$$\|P\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C\ (\text{degré de } P)^d\ \|Pm\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

De plus on donne la valeur optimale exacte de la constante d en précisant sa signification géométrique.

1. INTRODUCTION

Notations

Soit $N \geqslant 2$, $\alpha = (\alpha_1,..., \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ et $x = (x_1,..., x_N) \in \mathbb{R}^N$. On pose $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N$, $\alpha! = \alpha_1!\,\alpha_2! \cdots \alpha_N!$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_N^{\alpha_N}$, $D_i = \partial/\partial x_i$ $(i = 1,..., N)$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_N^{\alpha_N}$. Nous noterons également $x = (x', x_N)$ avec $x' = (x_1,..., x_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1}$. Si $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et f une fonction continue sur $\mathcal{O}$ on pose $\|f\|_{\mathcal{O}} = \sup_{x\in\mathcal{O}} |f(x)|$.

$\mathcal{P}_n$ désigne l'espace des polynômes de N variables réelles à coefficients réels, de degré au plus n.

Enoncé du résultat

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $\partial\Omega$ la frontière de Ω et m une fonction réelle de classe C^s définie sur un voisinage de $\bar{\Omega}$. Soit $\Gamma = \{x \mid m(x) = 0\}$.

Nous faisons les hypothèses suivantes:

(i) Si $a \in \Gamma \cap \partial\Omega$, il existe une fonction h réelle de classe C^2 définie sur un voisinage V de a telle que:

0021-9045/84 $3.00

640/40/2-5

(a) grad $h(x) \neq 0$ pour $x \in \partial\Omega \cap V$,

(b) les points de $V \cap \partial\Omega$ sont définis par $h(x) = 0$,

(c) les points de $V \cap \Omega$ sont définis par $h(x) > 0$.

(ii) Pour tout point $a \in \Omega$ on suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tel que $|\alpha| \leqslant s$, $D^\alpha m(a) \neq 0$ et l'on pose

$$d(a, m) = \inf\{|\alpha| \mid D^\alpha m(a) \neq 0\}.$$

Pour tout point $a \in \Gamma \cap \partial\Omega$ nous prendrons des coordonnées locales $x_1, \dots, x_N$ telles que a soit l'origine et que l'hyperplan tangent en a à $\partial\Omega$ soit défini par $x_N = 0$ et l'on suppose qu'il existe α tel que $|\alpha| + \alpha_N \leqslant s$, $D^\alpha m(a) \neq 0$. On posera $d(a, m) = \inf\{|\alpha| + \alpha_N \mid D^\alpha m(a) \neq 0$ (dans les coordonnées locales)$\}$.

Définition de la constante d: $d = d(\Omega, m) = \operatorname*{Sup}_{a \in \Omega \cup (\Gamma \cap \partial\Omega)} d(a, m)$.

En résumé ces hypothèses signifient que le bord de Ω est assez régulier au voisinage des points où Γ rencontre $\partial\Omega$ et que la fonction m n'est plate en aucun point de $\bar{\Omega}$.

Donnons quelques exemples. Soit $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ et $m(x, y) = y - x^2$. Alors, $d = 1$. Soit $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 2,\ 0 < y < 1\}$. Pour $m(x, y) = y - x^2$ on a $d = 2$, pour $m(x, y) = y^3 - x^2$ on a $d = 2$ et pour $m(x, y) = x^3 - y^2$ on a $d = 3$.

Le but de cet article est de démontrer le résultat suivant:

THÉORÈME. *Avec les notations précédentes, sous les hypothèses* (i) *et* (ii), *il existe une constante C telle que pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $P \in \mathscr{P}_n$ on ait*:

$$\|P\|_\Omega \leqslant Cn^d \|Pm\|_\Omega. \tag{1}$$

De plus la constante d est optimale.

Des résultats analogues ont été démontrés pour les fonctions d'une variable dans [2, 3]. Ce théorème améliore très sérieusement et par des méthodes différentes les résultats de [1]. En particulier on précise pour la première fois la signification géométrique de la constante d.

Principe de la démonstration de l'inégalité (1)

Pour chaque point de $\bar{\Omega}$ nous déterminerons un voisinage ouvert $\mathcal{O}$ pour lequel il existe $C_{\mathcal{O}}$ tel que pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $P \in \mathscr{P}_n$ on ait

$$\|P\|_{\mathcal{O} \cap \Omega} \leqslant C_{\mathcal{O}} n^d \|Pm\|_\Omega. \tag{2}$$

L'ensemble $\bar{\Omega}$ étant compact peut être recouvert par un nombre fini de tels ouverts $\mathcal{O}_1,\ldots,\mathcal{O}_r$. On aura donc l'inégalité (1) avec $C = \mathrm{Max}(C_{\mathcal{O}_1},\ldots, C_{\mathcal{O}_r})$. Nous serons amenés à considérer trois sortes de points: les points de $\bar{\Omega}\backslash\Gamma$, ceux de $\Gamma \cap \Omega$ et ceux de $\Gamma \cap \partial\Omega$. Pour les points de $\bar{\Omega}\backslash\Gamma$ le problème est simple: si $x_0 \in \bar{\Omega}\backslash\Gamma$, $m(x_0) \neq 0$, il existe donc, puisque m est continue, un voisinage ouvert $\mathcal{O}$ de x_0 dans lequel on a $|m(x)| > \frac{1}{2}\,|m(x_0)|$, on a alors immédiatement l'inégalité (2) avec $C_{\mathcal{O}} = 2\,|m(x_0)|^{-1}$.

Nous étudierons au paragraphe 3 le cas points de $\Gamma \cap \Omega$ et au paragraphe 4 celui des points de $\Gamma \cap \partial\Omega$. Mais auparavant il nous faut établir quelques lemmes pour les fonctions d'une variable.

2. Résultats Préliminaires

Pour un intervalle L de $\mathbb{R}$ et une fonction g mesurable réelle sur L on note $\|g\|_L = \sup_{x\in L} |g(x)|$.

Dans toute cette partie $I = [a, b]$ et $J = [c, d]$ sont deux intervalles tels que $a < c < d < b$. L'espace des polynômes d'une variable réelle à coefficients réels et de degré au plus n est noté H_n.

Lemme 1 (Inégalités de Bernstein et de Markov). *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $P \in H_n$ on a*:

$$\|P'\|_J \leqslant n[\inf\{c-a, b-d\}]^{-1}\,\|P\|_I,$$

$$\|P'\|_I \leqslant n^2 2(b-a)^{-1}\,\|P\|_I.$$

Pour la démonstration de ces inégalités voir [5, pp. 133, 134, et 141].

Lemme 2. *Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $P \in H_{n-1}$ on a*:

$$\|P\|_J \leqslant n2[\inf\{c-a, b-d\}]^{-1}\,\|(x-x_0)\,P\|_I,$$

$$\|P\|_I \leqslant n^2 2(b-a)^{-1}\,\|(x-x_0)P\|_I.$$

Démonstration. Posons $R(x) = (x-x_0)\,P(x)$. Alors $R(x) = (x-x_0)\,R'(y)$ où y est compris entre x et x_0, donc $P(x) = R'(y)$.

Pour $x \in J$, si $x_0 \in [\frac{1}{2}(c+a), \frac{1}{2}(b+d)]$, y appartient à ce même intervalle donc $|R'(y)| \leqslant n2[\inf\{c-a,\ b-d\}]^{-1}\,\|R\|_I$ (d'après le lemme 1) et si $x_0 \notin [\frac{1}{2}(c+a), \frac{1}{2}(b+d)]$, on aura $|x-x_0| > \inf\{\frac{1}{2}(c-a), \frac{1}{2}(b-d)\}$ ce qui démontre la première inégalité.

Démontrons la seconde inégalité. Deux cas sont possibles: si $x_0 \in I$, $y \in I$, et $|P(x)| = |R'(y)| \leqslant n^2 2(b-a)^{-1}\,\|R\|_I$ (d'après le lemme 1). Si $x_0 \notin I$ supposons par exemple $x_0 > b$, alors $\|(x-x_0)\,P(x)\|_I \geqslant \|(x-b)\,P(x)\|_I$ et nous sommes ramenés au cas précédent. Raisonnement analogue pour $x_0 < a$.

LEMME 3. *Soient $x_1,\dots,x_r$ des éléments de I. Pour tout $n > r$ et pour tout $P \in H_{n-r}$ on a*

$$\|P\|_J \leqslant (2r)^r\,[\inf\{c-a, b-d\}]^{-r}\, n^r\, \|(x-x_1)\cdots(x-x_r)\,P(x)\|_I,$$
$$\|P\|_I \leqslant 2^r(b-a)^{-r}\, n^{2r}\, \|(x-x_1)\cdots(x-x_r)\,P(x)\|_I.$$

Démonstration. On décompose chacun des segments $[a, c]$ et $[b, d]$ en r parties égales par les points $a = l_0 < l_1 < \cdots < l_r = c$, $b = m_0 > m_1 > \cdots > m_r = d$, et on pose $\Delta_i = [l_i, m_i]$ $(i = 0,\dots, r)$; en particulier $\Delta_0 = I$, $\Delta_r = J$. On a d'après le lemme 2:

$$\|P\|_J = \|P\|_{\Delta_r} \leqslant 2nr[\inf\{c-a, b-d\}]^{-1}\, \|(x-x_1)\,P(x)\|_{\Delta_{r-1}}$$
$$\leqslant \cdots \leqslant (2r)^r\,[\inf(c-a, b-d)]^{-r}\, n^r\, \|(x-x_1)\cdots(x-x_r)\,P(x)\|_{\Delta_0(=I)}$$

de même:

$$\|P\|_I \leqslant 2(b-a)^{-1}\, n^2\, \|(x-x_1)\,P(x)\|_I$$
$$\leqslant \cdots \leqslant 2^r(b-a)^{-r}\, n^{2r}\|(x-x_1)\cdots(x-x_r)\,P(x)\|_I.$$

LEMME 4. *Soit h une fonction définie sur I par $h(x) = (x-x_1)\cdots(x-x_r)\,u(x)$ où pour tout i, $x_i \in I$ (les x_i ne sont pas nécessairement tous distincts) et où u est continue dans un voisinage de I. On suppose que h est de classe C^r dans ce voisinage et que pour tout $x \in I$, $|h^{(r)}(x)| > \mu > 0$. On a alors, pour tout $x \in I$, $|u(x)| > \mu/r!$.*

Démonstration. Posons $P(x) = (x-x_1)\cdots(x-x_r)$ donc $h = Pu$. Avec les notations habituelles pour les différences divisées on a [4, p. 7]:

$$[x_1 \cdots x_{r+1}]h = \sum_{i=1}^{r+1} Pu(x_i)\Big/\prod_{i\neq j}(x_i - x_j).$$

Posant $x_{r+1} = x$, compte tenu du fait que $P(x_i) = 0$ $(i = 1,\dots, r)$ il reste $[x_1 \cdots x_r x]h = u(x)$. Par ailleurs on sait [4, p. 6] que pour tout $x \in I$ il existe $\xi \in I$ tel que $[x_1 \cdots x_r x]h = h^{(r)}(\xi)/r!$ ce qui achève la démonstration du lemme.

LEMME 5. *Soit m une fonction de classe C^r sur un voisinage de I vérifiant pour tout $x \in I\,|m^{(r)}(x)| > \mu > 0$. Alors il existe $x_1, x_2,\dots, x_r$ dans I tels que pour tout $x \in I$ on ait $|m(x)| \geqslant \mu(r!)^{-1}\,|(x-x_1)\cdots(x-x_r)|$ avec inégalité stricte sauf éventuellement aux points $x_1,\dots, x_r$.*

Démonstration. Le problème de la meilleure approximation de m par un élément de $\mathscr{P}_{r-1} \cap W$ où $W = \{g \in C(I) \mid \operatorname{sgn}(g(x)) = \operatorname{sgn}(m(x))$ et $|g(x)| \leqslant 2\,|m(x)|\ (x \in I)\}$ possède toujours une ou plusieurs solutions. De plus si P est une solution quelconque on sait qu'elle coincide avec m en au moins r points que nous noterons $x_1,..., x_r$ non nécessairement distinct (on compte leur multiplicité). Alors, d'après [4, p. 3] on a avec les mêmes notations que dans le lemme 4

$$\begin{aligned} m(x) &= [x_1]m + \cdots + ([x_1 \cdots x_r]m)(x-x_1) \cdots (x-x_{r-1}) \\ &\quad + ([x_1 \cdots x_r x]m)(x-x_1) \cdots (x-x_r) \\ &= P(x) + ([x_1 \cdots x_r x]m)(x-x_1) \cdots (x-x_r). \end{aligned}$$

Mais d'une part $|m(x)-P(x)| \leqslant |m(x)|$ et d'autre part il existe $\xi \in I$ tel que $[x_1 \cdots x_r x]m = m^{(r)}(\xi)/r!$. Le lemme en résulte immédiatement.

PROPOSITION 1. *Soit m une fonction réelle de classe C^r sur un voisinage de I telle que pour tout $x \in I$, $|m^{(r)}(x)| > \mu > 0$. Alors pour tout $n > r$ et pour tout polynôme $P \in H_{n-r}$ on a:*

$$\|P\|_J \leqslant (2r)^r \, [\inf\{c-a, b-d\}]^{-r} \, r! \, \mu^{-1} n^r \, \|Pm\|_I,$$
$$\|P\|_I \leqslant 2^r (b-a)^{-r} \, r! \, \mu^{-1} n^{2r} \, \|Pm\|_I.$$

Démonstration. D'après le lemme 5 il existe $x_1, x_2,..., x_r$ dans I tels que l'on ait $|m(x)| > \mu(r!)^{-1} \, |(x-x_1) \cdots (x-x_r)|$. La proposition résulte donc immédiatement du lemme 3.

3. CONSTRUCTION DU VOISINAGE $\mathcal{O}$ POUR UN POINT DE $\Gamma \cap \Omega$

Nous allons d'abord établir le résultat suivant.

PROPOSITION 2. *Soit ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ contenant l'origine et soit $m \in C^r(\omega)$. Supposons que pour tout β vérifiant $|\beta| < r$ on ait $D^\beta m(0) = 0$ et que pour un α tel que $|\alpha| = r$ on ait $D^\alpha m(0) \neq 0$. Alors il existe une rotation δ de $\mathbb{R}^N$ telle qu'en notant $y = \delta(x)$ la nouvelle variable on ait $D_1^r(m \circ \delta^{-1})(0) \neq 0$.*

Démonstration. Utilisant les hypothèses et la formule de Taylor on obtient $m(x) = \sum_{|\beta|=r} (\beta!)^{-1} \, (D^\beta m(0)) \, x^\beta + o(|x|^r)$ ou encore $m(x) = P(x) + o(|x|^r)$. Si l'on avait $|m(x)| = o(|x|^r)$ au voisinage de 0, on aurait $P(x) = o(|x|^r)$ et par suite $D^\alpha P(x) = 0$ donc $D^\alpha m(0) = 0$ contrairement à l'hypothèse. Il existe donc une suite de réels (ε_i) tendant vers 0, une suite (d_i) vérifiant pour tout $i \in N$, $d_i \in \mathbb{R}^N$ et $|d_i| = 1$ et une constante $c > 0$ telles que

$m(\varepsilon_i d_i)/\varepsilon_i^r > c$. La boule unité de $\mathbb{R}^N$ étant compacte il existe une sous-suite encore notée (d_i) qui converge vers une limite d ($|d| = 1$). On a alors

$$\begin{aligned} m(\varepsilon_i d_i) &= \sum_{|\beta|=r} (\beta!)^{-1} D^\beta m(0)\, \varepsilon_i^r d_i^\beta + o(\varepsilon_i^r) \\ &= \sum_{|\beta|=r} (\beta!)^{-1} D^\beta m(0)\, \varepsilon_i^r d^\beta + o(\varepsilon_i^r) \\ &= m(\varepsilon_i d) + o(\varepsilon_i^r) \end{aligned}$$

ce qui montre l'existence d'une constante $c' > 0$ telle que $m(\varepsilon_i d)/\varepsilon_i^r > c'$ pour tout i.

Soit alors δ une rotation de $\mathbb{R}^N$ telle que $y = \delta(x)$ et que d soit la direction de l'axe des y_1.

Posons $g(y_1) = (m \circ \delta^{-1})\ (y_1, 0,..., 0)$. Il est alors clair que g vérifie $g^{(i)}(0) = 0$ pour $i < r$ et que (formule de Taylor) $g^{(r)}(0) \neq 0$, ce qui démontre la proposition.

Nous sommes maintenant en mesure de déterminer le voisinage $\mathcal{O}$. Soit $a \in \Gamma \cap \Omega$. D'après l'hypothèse (ii) du théorème et la définition de d il existe $\alpha \in \mathbb{N}^N$ vérifiant $|\alpha| \leqslant d$ tel que $D^\alpha m(a) \neq 0$. Posons $r = |\alpha|$. Alors grâce à la proposition 2, on peut toujours supposer quitte à faire un changement de variables (translation + rotation) que le point considéré est l'origine et que $D_1^r m(0) \neq 0$. Il est donc possible de trouver $\ell > 0$ tel que $A = \{x \mid |x_i| < \ell$ $(i = 1,..., N)\}$ soit contenu dans Ω et que pour $x \in A$ on ait $|D_1^r m(x)| > \frac{1}{2} |D_1^r m(0)|$.

Soit $\mathcal{O} = \{x \mid |x_1| < \ell/2,\ |x_i| < \ell\ \ (i = 2,..., N)\}$. Fixons $x_2,..., x_N$. Alors la fonction f définie par $f(x_1) = m(x_1,..., x_N)$ est une fonction qui vérifie: $|f^{(r)}(x_1)| > \frac{1}{2} |D_1^r m(0)|$ et la fonction Q définie par $Q(x_1) = P(x_1,..., x_N)$ vérifie $Q \in H_n$. Donc d'après la proposition 1

$$\begin{aligned} \|Q\|_{]-\ell/2, \ell/2[} &\leqslant (n+r)^r\, 2r!(4r)^r\, |\ell^r D_1^r m(0)|^{-1}\, \|fQ\|_{]-\ell, +\ell[} \\ &\leqslant C_1 n^r\, \|Pm\|_A. \end{aligned}$$

Mais le résultat étant indépendant de $x_2,..., x_N$ on en conclut que

$$\|P\|_{\mathcal{O}} \leqslant C_1 n^r \|Pm\|_A \leqslant C_1 n^d\, \|Pm\|_\Omega.$$

4. Construction du voisinage $\mathcal{O}$ pour un point de $\Gamma \cap \partial\Omega$

Lemme 6. *Soit ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ contenant l'origine et $f \in C^r(\omega)$. Soit $c \in \mathbb{R}$. Alors il existe des entiers strictement positifs $\gamma_0 (=1), \gamma_1,..., \gamma_{[r/2]}$ tels que:*

$$[(D_1 + cx_1 D_N)^r f](0) = \left[\sum_{p=0}^{[r/2]} c^p \gamma_p D_1^{r-2p} D_N^p f \right](0).$$

Démonstration. En développant formellement le premier membre, nous obtenons une somme de termes de la forme

$$[D_1^{r_1}(cx_1 D_N)^{p_1} D_1^{r_2}(cx_1 D_N)^{p_2} \cdots D_1^{r_k}(cx_1 D_N)^{p_k} f](0) \tag{3}$$

où les r_i et les p_i sont des entiers non nuls (sauf peut-être r_1 et p_k) qui vérifient $p_1 + \cdots + p_k = p$, $r_1 + \cdots + r_k = r - p$. Si $r_1 = 0$ le terme (3) est évidemment nul et si $r_1 \neq 0$ on remarque que pour une fonction $g \in C^{r_1}(\omega)$ d'après la formule de Leibniz

$$\begin{aligned}[D_1^{r_1}(x_1^{p_1} g)](0) &= \sum_{i=0}^{r_1} \binom{r_1}{i} (D_1^i x_1^{p_1})(0)\, D_1^{r_1 - i} g(0) \\ &= \binom{r_1}{p_1} p_1!\, D_1^{r_1 - p_1} g(0) \qquad \text{si} \quad r_1 \geqslant p_1, \\ &= 0 \qquad \text{sinon,}\end{aligned} \tag{4}$$

et donc par une récurrence facile le terme (3) vaut soit 0 soit $c^p \beta_{(p_1,\ldots,p_k)} [D_1^{r-2p} D_N^p f](0)$ où $\beta_{(p_1,\ldots,p_k)}$ est un entier strictement positif. Pour $p = 0, 1,\ldots, [r/2]$ on voit que $\beta_{(p)}$ qui provient par le calcul précédent du terme $[D_1^{r-p}(x_1 D_N)^p f](0)$ vaut $r!/p!$ donc γ_p est non nul. Par ailleurs il est clair que $\gamma_0 = 1$.

Nous allons nous placer en un point de $\Gamma \cap \partial\Omega$. Il est possible grâce à l'hypothèse (i) de supposer, quitte à faire un changement de variables, (translation + rotation) qu'il s'agit de l'origine et que dans un voisinage V_1 de l'origine les points de $\partial\Omega$ sont définis par $x_N = v(x')$ et ceux de Ω par $x_N > v(x')$ où $v \in C^2$ et vérifie $v(0) = 0$, grad $v(0) = 0$.

Le plan tangent à $\partial\Omega$ en 0 est défini par l'équation $x_N = 0$. D'après l'hypothèse (ii) et la définition de d il existe $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tel que $|\alpha| + \alpha_N \leqslant d$ et $D^\alpha m(0) \neq 0$. On peut toujours à l'aide de la proposition 2 (c'est à dire en faisant une rotation dans $\mathbb{R}^{N-1}$) se ramener au cas où $\alpha = (\alpha_1, 0, 0,\ldots, 0, \alpha_N)$ donc au cas où m vérifie $D_1^{\alpha_1} D_N^{\alpha_N} m(0) \neq 0$ avec $\alpha_1 + 2\alpha_N \leqslant d$.

Nous allons maintenant faire un changement de variables dont le but est de rendre strictement concave le bord de Ω au voisinage de 0, de façon à pouvoir recouvrir l'intersection de Ω avec un voisinage de 0 par des segments ayant une longueur minimum fixée et une direction voisine de celle de l'axe $0x_1$. Sur chacun de ces segments nous pourrons appliquer les résultats de la première partie (en une variable).

Soit $c > 0$. Faisons le changement de variables τ défini par $X = \tau(x)$,

$X' = x'$, $X_N = x_N - c(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{N-1}^2)$. Le changement de variables réciproque τ^{-1} est défini par:

$$x' = X', \qquad x_N = X_N + c(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_{N-1}^2).$$

Nous remarquons que τ a la propriété suivante: si $P \in \mathscr{P}_n$ alors $P \circ \tau^{-1} \in \mathscr{P}_{2n}$.

Nous allons maintenant préciser le choix de c.

(I) Nous choisissons c suffisamment grand pour que la différentielle seconde de la fonction $\varphi(x') = v(x') - c(x_1^2 + \cdots + x_{N-1}^2)$ soit une forme bilinéaire symétrique définie *négative* ce qui implique (voir [6, p. 100]) que dans $\mathbb{R}^N$ la surface définie par l'équation $x_N = \varphi(x')$ est strictement concave au voisinage de l'origine. En d'autres termes comme on a $x_N - v(x') = X_N - \varphi(X')$, dans les nouvelles coordonnées le bord de $\tau(\Omega)$ est défini au voisinage de l'origine par $X_N = \varphi(X')$ et il est strictement concave. Remarquons que l'on a $\varphi(0) = 0$, $\operatorname{grad} \varphi(0) = 0$ et que pour les points de $\tau(\Omega)$ au voisinage de l'origine $X_N > \varphi(X')$.

(II) On a $\partial/\partial X_1 = D_1 + 2cx_1 D_N$ donc d'après le lemme 6:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial X_1}\right)^{\alpha_1 + 2\alpha_N} (m \circ \tau^{-1})\right](0) = \left[\sum_{p=0}^{[\frac{1}{2}\alpha_1 + \alpha_N]} (2c)^p \gamma_p D_1^{\alpha_1 + 2\alpha_N - 2p} D_N^p m\right](0).$$

Dans la somme du second membre, il y a au moins un terme non nul (celui qui correspond à $p = \alpha_N$) donc pour c suffisamment grand le second membre n'est pas nul. Nous ferons également un choix de c qui réalise cette condition.

Puisque $(\partial/\partial X_1)^{\alpha_1 + 2\alpha_N} (m \circ \tau^{-1})(0) \neq 0$ il existe un voisinage V de 0 et un nombre $\varepsilon > 0$ tel que pour tout λ vérifiant $|\lambda| < \varepsilon$ et pour tout X dans V on ait

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial X_1} + \lambda \frac{\partial}{\partial X_N}\right)^{\alpha_1 + 2\alpha_N} (m \circ \tau^{-1})(X)\right| \geqslant \frac{1}{2}\left|\left(\frac{\partial}{\partial X_1}\right)^{\alpha_1 + 2\alpha_N} (m \circ \tau^{-1})(0)\right|. \tag{5}$$

Pour ℓ et h fixés, positifs, on note

$$E_{\ell h} = \{X \in \mathbb{R}^N \mid |X_i| = \ell \ (i = 1, \ldots, N-1),\ \varphi(X') \leqslant X_N \leqslant h\}$$

(voir Fig. 1). Nous pouvons choisir ℓ et h de telle sorte que les propriétés suivantes soient vérifiées

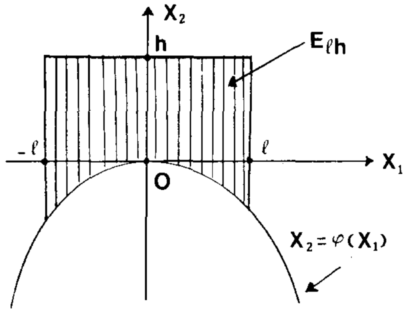

FIG. 1. L'ensemble $E_{\ell h}$ pour $N = 2$.

(i) $E_{\ell h} \subset V$,

(ii) $E_{\ell h} \subset \bar{\Omega}$,

(iii) pour tout point $a \in E_{\ell h}$ il existe un segment S_a contenu dans $E_{\ell h}$ passant par a et défini par

$$S_a = \{X \mid X_2 = a_2, ..., X_{N-1} = a_{N-1}, X_N = \gamma_a X_1 + \delta_a, |X_1| \leqslant \ell\}$$

avec $|\gamma_a| < \varepsilon$ (en termes géométriques simples: on choisit ℓ suffisamment petit pour pouvoir recouvrir $E_{\ell h}$ par des segments "à peu près" horizontaux de direction voisine de celle de $0X_1$). Soit

$$\mathcal{O}_{\ell h} = \{X \mid |X_i| < \ell \ (i = 2, 3, ..., N-1), |X_1| < \tfrac{1}{2}\ell, X_N < h\}$$

(voir Fig. 2). Pour a donné plaçons nous maintenant sur S_a et faisons le changement de variable $Y = \sigma(X)$ défini par $Y' = X'$, $Y_N = X_N - \gamma_a X_1 - \delta_a$. On aura $\partial/\partial Y_1 = (\partial/\partial X_1) + \gamma_a(\partial/\partial X_N)$. $\sigma(S_a)$ est le segment défini par

$$Y_2 = a_2, ..., Y_{N-1} = a_{N-1}, \qquad Y_N = 0, \quad |Y_1| < \ell.$$

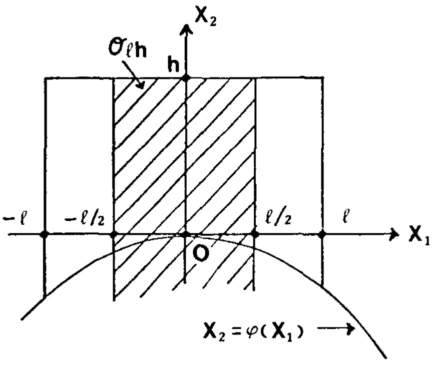

FIG. 2. L'ensemble $\mathcal{O}_{\ell h}$ pour $N = 2$.

Nous avons pour $X \in S_a$

$$(m \circ \tau^{-1})(X_1, \ldots, X_{N-1}, X_N - \gamma_a X_1 - \delta_a) = (m \circ \tau^{-1} \circ \sigma^{-1})(Y_1, \ldots, Y_{N-1}, 0)$$

et donc d'après (5)

$$\left| \left[\left(\frac{\partial}{\partial Y_1} \right)^{\alpha_1 + 2\alpha_N} (m \circ \tau^{-1} \circ \sigma^{-1}) \right] (Y) \right| > \frac{1}{2} \left| \left[\left(\frac{\partial}{\partial X_1} \right)^{\alpha_1 + 2\alpha_N} (m \circ \tau^{-1}) \right] (0) \right|.$$

Donc d'après la proposition 1, nous avons, pour a donné:

$$\begin{aligned} &\| P \circ \tau^{-1} \circ \sigma^{-1} \|_{\sigma(S_a) \cap \sigma(\mathcal{O}_{\ell h})} \\ &\qquad \leqslant C_2 n^{\alpha_1 + 2\alpha_N} \| P \circ \tau^{-1} \circ \sigma^{-1} \cdot m \circ \tau^{-1} \circ \sigma^{-1} \|_{\sigma(S_a)} \end{aligned}$$

et

$$\| P \circ \tau^{-1} \|_{S_a \cap \mathcal{O}_{\ell h}} \leqslant C_2 n^{\alpha_1 + 2\alpha_N} \| P \circ \tau^{-1} \cdot m \circ \tau^{-1} \|_{S_a}.$$

Mais le résultat est indépendant du point a choisi dans $E_{\ell h}$. Il en résulte puisque $E_{\ell h}$ peut être recouvert par des segments S_a que $\| P \circ \tau^{-1} \|_{\mathcal{O}_{\ell, h} \cap \tau(\Omega)} \leqslant C_2 n^{\alpha_1 + 2\alpha_N} \| P \circ \tau^{-1} \cdot m \circ \tau^{-1} \|_{E_{\ell h}}$. On achève alors en prenant $\mathcal{O} = \tau^{-1}(\mathcal{O}_{\ell h})$ ce qui nous donne $\| P \|_{\mathcal{O} \cap \Omega} \leqslant C_2 n^{\alpha_1 + 2\alpha_N} \| Pm \|_{\tau^{-1}(E_{\ell h})} \leqslant C_2 n^d \| Pm \|_\Omega$.

5. Optimalité de la constante d

Pour démontrer l'optimalité de la constante d nous montrerons que l'on peut trouver une constante C_3 telle que pour tout n il existe $P \in \mathscr{P}_n$ tel que $n^d \| Pm \|_\Omega \leqslant C_3 \| P \|_\Omega$.

Nous utiliserons de façon essentielle les polynômes de Jacobi. Les notations $P_n^{(d,0)}$ concernant ces polynômes seront celles de [7, Chap. IV].

Rappelons les résultats suivants [7, pp. 168–169]: pour $d \geqslant 0$, $\| P_n^{(d,0)} \|_{[-1,1]} = | P_n^{(d,0)}(1) | = n^d$,

$$\begin{aligned} | P_n^{(d,0)}(\cos \theta) | &\leqslant C_4 n^{-1/2} \theta^{-d-1/2} && \text{si} \quad n^{-1} \leqslant \theta \leqslant \pi/2, \\ &\leqslant C_5 n^d && \text{si} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant n^{-1}, \\ &\leqslant 1 && \text{si} \quad \pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi. \end{aligned}$$

On en déduit que pour $r \in [0, d/2]$, compte tenu du fait que $1 - \cos \theta < \theta^2/2$:

$$\begin{aligned} (1 - \cos \theta)^r | P_n^{(d,0)}(\cos \theta) | &\leqslant C_6 n^{-1/2} \theta^{2r-d-1/2} \leqslant C_6 n^{d-2r} && \text{si} \quad n^{-1} \leqslant \theta \leqslant \pi/2 \\ &\leqslant C_7 n^d n^{-2r} && \text{si} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant n^{-1}, \\ &\leqslant 2^r && \text{si} \quad \pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi, \end{aligned}$$

et par suite pour $x \in [-1, 1]$:

$$\|(1-x)^r P_n^{(d,0)}(x)\|_{[-1,1]} \leqslant C_8 n^{d-2r} \leqslant C_8 n^{-2r} \|P_n^{(d,0)}\|_{[-1,+1]}$$

ou encore:

$$\|u^r P_n^{(d,0)}(1-u)\|_{[0,2]} \leqslant n^{-2r} \|P_n^{(d,0)}(1-u)\|_{[0,2]}. \tag{6}$$

Considèrons maintenant le polynôme pair $Q_{2n}(x) = P_n^{(d,0)}(1-2x^2)$. On a $\|Q_{2n}\| = |Q_{2n}(0)| = n^d$. Posons $x = \sin(\theta/2)$ $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$ alors $x^r Q_{2n}(x) = (\sin(\theta/2))^r P_n^{(d,0)}(\cos\theta)$ donc par un raisonnement analogue au raisonnement précédent, pour $r < d$:

$$\begin{aligned} |(\sin(\theta/2))^r P_n^{(d,0)}(\cos\theta)| &\leqslant C_9 n^{-1/2} \theta^{-d-(1/2)+r} && \text{si} \quad n^{-1} \leqslant \theta \leqslant \pi/2, \\ &\leqslant C_{10} n^d n^{-r} && \text{si} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant n^{-1}, \\ &\leqslant 1 && \text{si} \quad \pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi, \end{aligned}$$

et donc puisque Q_{2n} est pair

$$\||x|^r Q_{2n}\|_{[-1,1]} \leqslant C_{11} n^{d-r} \leqslant C_{11} n^{-r} \|Q_{2n}\|_{[-1,1]}. \tag{7}$$

Il est clair qu'il suffit de se limiter ici au cas $d > 0$. Pour un point $a \in \bar{\Omega}$ où $d(a, m) = d(\Omega, m) = d$ deux cas sont à considérer:

Cas 1 $(a \in \Omega)$. Puisque $d > 0$, $a \in \Omega \cap \Gamma$. Nous pouvons supposer que a est l'origine et que Ω est contenu dans $[-1, 1]^N$. Dans ce cas, d'après l'hypothèse la restriction de m à Ω se prolonge à un voisinage de $[-1, 1]^N$ en une fonction de classe C^s que nous noterons encore m, et l'on pourra écrire pour tout x:

$$m(x) = \sum_{|\alpha|=d} (x^\alpha/\alpha!)\, m^{(\alpha)}(\lambda x) \qquad \text{où} \quad \lambda \in [0, 1].$$

Considérons le polynôme P défini par $P(x) = \prod_{i=1}^N Q_{2n}(x_i)$. Le degré de P est $2Nn$ et $\|P\|_{[-1,1]^N} = |P(0)| = n^{Nd}$ et d'après (7):

$$\begin{aligned} \|Pm\|_\Omega &\leqslant \sum_{|\alpha|=d} (\alpha!)^{-1} \|x^\alpha P(x)\|_{[-1,1]^N} \|m^{(\alpha)}\|_{[-1,1]^N} \\ &\leqslant C_{12} \|P\|_\Omega\, n^{-d} \leqslant C_{13} (2Nn)^{-d} \|P\|_\Omega. \end{aligned}$$

Cas 2 $(a \in \partial\Omega)$. Nous noterons $B(x, \rho)$ la boule ouverte de centre x et de rayon ρ. Nous supposerons là encore que a est l'origine et que le plan tangent est défini en ce point par $x_N = 0$. Il existe un point $b = (0, \ldots, 0, b_N)$ tel que $B(b, |b_N|) \cap \Omega = \varnothing$ et l'on peut toujours se placer dans des conditions telles que $\Omega \subset B(0, 1)$. Posons $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^N x_i^2$ et considérons le polynôme R défini par:

$$R(x) = \prod_{1}^{N-1} Q_{2n}(x_i) \cdot P_n^{(2d,0)}(1 - \|x\|^2) \cdot P_n^{(2d,0)}(1 - \|x\|^2 + 2b_N x_N).$$

On a degré de $R = 2(N+1)n$ et $\|R\|_\Omega = |R(0)| = n^{(N+3)d}$. La restriction de la fonction m à Ω peut être prolongée en une fonction de classe C^s dans un voisinage de $B(0, 1)$. La fonction prolongée est encore notée m. Un développement de Taylor à l'ordre d nous donne: $m(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant d} C_\alpha x^\alpha$ avec $C_\alpha = (\alpha!)^{-1}\, m^{(\alpha)}(0)$ pour $|\alpha| < d$ et $C_\alpha = (\alpha!)^{-1}\, m^{(\alpha)}(\lambda x)$, $\lambda \in [0, 1]$ pour $|\alpha| = d$. D'après (6) on a pour chaque α tel que $|\alpha| + \alpha_N \geqslant d$ (pour les autres $D^\alpha m(0) = 0$),

$$\begin{aligned} \|x^\alpha R\|_\Omega &= \|x^{\alpha'} x_N^{\alpha_N} R\|_{B(0,1)} \\ &\leqslant C_{14} n^{d(N-1) - |\alpha'|} \, \|x_N^{\alpha_N} P_n^{(2d,0)}(1 - \|x\|^2) \\ &\quad \times P_n^{(2d,0)}(1 - \|x\|^2 + 2b_N x_N)\|_{B(0,1)} \end{aligned}$$

et en écrivant $x_N = (2b_N)^{-1}\, (2b_N x_N - \|x\|^2 + \|x\|^2)$ à l'aide de (7) on obtient:

$$\|x^\alpha R\|_\Omega \leqslant C_{15} n^{d(N+3) - |\alpha| - \alpha_N} \leqslant C_{16} [2(N+1)n]^{-|\alpha| - \alpha_N} \, \|R\|_\Omega$$

ce qui achéve la démonstration.

Je remercie le référé pour ses remarques qui ont permis une simplification de cet article. En particulier la démonstration des lemmes 4 et 5 et de la proposition 2 lui sont dues.

BIBLIOGRAPHIE

1. P. GOETGHELUCK, Majorations pour les polynômes dans certains espaces de Banach. Application à l'approximation, *J. Approx. Theory* **18** (1976), 316–328.
2. P. GOETGHELUCK, Polynomial inequalities and Markov's inequality in weighted L^p-spaces, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **33** (1979).
3. P. GOETGHELUCK, Inégalité de Bernstein dans les espaces L^p avec poids, *J. Approx. Theory* **28** (1980), 359–365.
4. L. M. MILNE-THOMSON, "Finite Differences," Chelsea, New York, 1981.
5. I. P. NATANSON, "Constructive Function Theory," Vol. I, Ungar, New York, 1964.
6. A. W. ROBERTS AND D. E. VARBERG, "Convex Functions," Academic Press, New York/London, 1973.
7. G. SZEGÖ, "Orthogonal Polynomials," Amer. Math. Soc. Coll. Pub., Volume 23, New York, 1959.